SF1624 Algebra och geometri

Artonde föreläsningen

Mats Boij

Institutionen för matematik
KTH

26 november, 2009

Isometriska avbildningar

Definition (Isometrisk (ortogonal) avbildning)

En linjär avbildning T från $\mathbb{R}^n$ till $\mathbb{R}^n$ är *isometrisk* – eller *ortogonal* – om T bevarar alla längder, dvs om

$$|T(\overline{u})| = |\overline{u}|, \qquad \forall \overline{u} \in \mathbb{R}^n.$$

Exempel

- Rotationer i planet och rummet
- Speglingar i planet och rummet

Även vinklarna bevaras

Sats

Om T är en isometrisk avbildning gäller att

$$T(\overline{u}) \cdot T(\overline{v}) = \overline{u} \cdot \overline{v}$$

dvs T bevarar skalärprodukten.

Bevis.

Eftersom T bevarar sidlängderna i en triangel måste den även bevara vinklarna. Vi kan få vinkeln θ mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$ som

$$\cos\theta = \frac{|\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2 - |\overline{u} - \overline{v}|^2}{2|\overline{u}| \cdot |\overline{v}|}$$

Alltså är

$$\begin{aligned} 2\overline{u} \cdot \overline{v} &= |\overline{u}|^2 + |\overline{v}|^2 - |\overline{u} - \overline{v}|^2 \\ &= |T(\overline{u})|^2 + |T(\overline{v})|^2 - |T(\overline{u} - \overline{v})|^2 = 2T(\overline{u}) \cdot T(\overline{v}) \end{aligned}$$

Ortonormala baser (ON-baser)

Vi har tidigare sett på ortogonala baser

Definition

Vektorerna $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ utgör en *ortonormal bas* – eller *ON-bas* –för $\mathbb{R}^n$ om de har längd 1 och är parvis ortogonala, dvs om

$$\overline{u}_i \cdot \overline{u}_j = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j, \\ 0, & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

Vi såg att det då är lätt att bestämma koordinaterna för en vektor med hjälp av ortogonal projektion:

Sats

Om $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_n$ är en ortogonal bas får vi för varje vektor $\overline{v}$ i $\mathbb{R}^n$ att

$$\begin{aligned} \overline{v} &= \mathrm{Proj}_{u_1} \overline{v} + \mathrm{Proj}_{u_2} \overline{v} + \cdots \mathrm{Proj}_{u_n} \overline{v} \\ &= (\overline{u}_1 \cdot v)\overline{u}_1 + (\overline{u}_1 \cdot v)\overline{u}_2 + \cdots + (\overline{u}_1 \cdot v)\overline{u}_n. \end{aligned}$$

Matrisen för en isometrisk avbildning

Sats

A är matrisen för en isometrisk avbildning T precis om kolonnerna utgör en ON-bas.

Bevis.

Om A är matrisen för en isometrisk avbildning och kolonnerna är $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n$ får vi att

$$\overline{u}_i \cdot \overline{u}_j = T(\overline{e}_i) \cdot T(\overline{e}_j) = \overline{e}_i \cdot \overline{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{om } i = j, \\ 0 & \text{om } i \neq j. \end{cases}$$

Om kolonnerna $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \dots, \overline{u}_n$ utgör en ON-bas får vi för vektorn $\overline{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ att

$$T(\overline{u}) \cdot T(\overline{u}) = \sum_{i,j} x_i x_j \overline{u}_i \cdot \overline{u}_j = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \overline{u} \cdot \overline{u}.$$

$\square$

Ortogonala matriser

Definition (Ortogonala matriser)

En *ortogonal* matris är en matris A som uppfyller $A^tA = I$.

Sats

Följande är ekvivalent för en kvadratisk matris A:

- *A är ortogonal,*
- $A^tA = I$,
- $A^{-1} = A^t$,
- *kolonnerna i A utgör en ON-bas.*
- *raderna i A utgör en ON-bas.*

Bevis.

Vi har att $A^tA = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^t \Leftrightarrow AA^t = I$ och

$$\begin{aligned} A^tA = I &\quad\Leftrightarrow\quad \text{kolonnerna i } A \text{ är ON-bas} \\ AA^t = I &\quad\Leftrightarrow\quad \text{raderna i } A \text{ är ON-bas} \end{aligned}$$

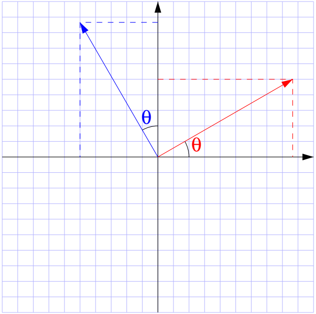
Ortogonala 2×2-matriser

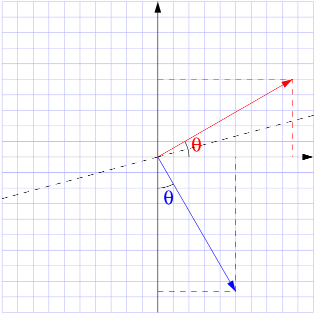
Sats

Alla ortogonala 2×2-matriser kan skrivas

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \textit{eller} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

för någon vinkel θ, dvs de motsvarar rotation eller spegling.





Ortogonala 3×3-matriser

Sats

En ortogonal 3×3-matris är antingen en spegling i ett plan eller en rotation kring en linje. En rotation är en sammansättning av två speglingar.

Efter byte av bas kan vi få matrisen på formen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{eller} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

för någon vinkel θ.